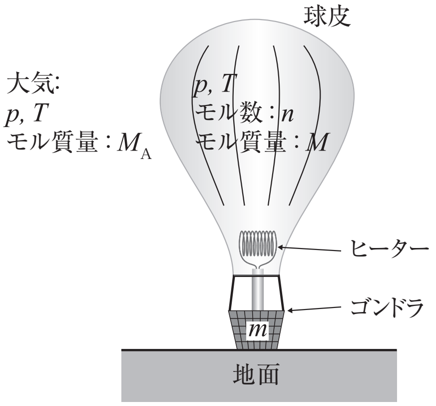
第 31 講　総合演習４

1

図のように，断熱素材でできた球皮とゴンドラ等からなる気球が地面に置かれて浮上せず静止している。大気（空気）は温度 T [K] の理想気体とみなすことができる。大気の圧力は重力のため高度が低いほど高いが，ここではまず，その圧力の高度依存性を無視して気球の中心の高度での大気の圧力 p [Pa] で近似する。一方，密閉された球皮内には大気と同じ圧力 p と温度 T を持つ単原子理想気体 n [mol] が入っており，球皮内の気体の内部エネルギー U [J] は，気体定数 R [J/mol·K] を用いて，$U=\dfrac{3}{2}nRT$ と書くことができる。球皮は最初十分にしぼんだ状態であり，球皮内に装着されたヒーターにより，球皮内の気体の温度を上昇させ気体の体積を膨張させることができる。このとき，球皮内の気体の圧力と大気圧は常に釣り合っているとする。以下の文章の［ (1) ］から［ (10) ］に適切な数式を入れ，［ (11) ］には有効数字２ケタの数値を入れよ。



問１

球皮内の気体の体積は，状態方程式より［ (1) ］[m^3] と書くことができる。いまヒーターによって熱量 Q [J] をゆっくり気体に与えたところ，気体の温度と体積がそれぞれ $\varDelta T$ [K] および $\varDelta V$ [m^3] だけ変化した。この過程で球皮内の気体が外部にした仕事は［ (2) ］[J] であり，その内部エネルギーの変化は［ (3) ］[J] となる。したがって，熱力学第一法則より，Q は $\varDelta T$ および $\varDelta V$ を用いて $Q=$［ (4) ］[J] と表せる。この式と状態方程式より，球皮内の気体の定圧モル比熱 C_p [J/mol·K]（圧力一定の条件で 1 mol の気体を単位温度上昇させるのに必要な熱量）は R を用いて $C_p=$［ (5) ］[J/mol·K] と書くことができる。

ゴンドラの質量を m [kg]，球皮内の気体と空気のモル質量（1 mol 当りの質量）をそれぞれ M [kg/mol] および M_A [kg/mol] とし，重力加速度の大きさを g [m/s^2] とする。また，気球の質量は球皮内の気体とゴンドラの質量のみを考慮し，ほかは全て無視せよ。気球の体積は球皮内の気体の体積のみを考慮し，ほかは全て無視せよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問2

気球に働く重力の大きさは［(6)］[N] である。一方，気球を図の状態から温めて体積が V_B [m^3] になったとすると，この体積 V_B を占めていた空気のモル数は，T と p を用いて［(7)］[mol] と表せる。重力のため大気の圧力は下方ほど高い。このことから浮力が生じる。浮力の大きさはアルキメデスの原理から正確に求められ，気球に働く浮力の大きさは［(8)］[N] となる。以上より，気球を浮上させるにはその体積 V_B を［(9)］[m^3] より大きくする必要があり，気球に［(10)］T [J] より多い熱量を与えなければならない。

例として $M = 4.0\times10^{-3}$ [kg/mol] のヘリウムガス 4000 [mol] を用いた気球の場合を考える。空気のモル質量は $M_A = 29\times10^{-3}$ [kg/mol] である。大気の温度が $T = 300$ [K] の場合に，$m = 124$ [kg] のゴンドラをつけた気球を浮上させるためには，ヘリウムガスの温度を［(11)］[K] より高くする必要がある。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

理想気体とみなせる1molの気体（単原子分子気体とは限らない）が，なめらかに動くピストンでシリンダー内に閉じ込められている。この気体の状態を下記のように過程Ⅰ～Ⅳによって，状態1→2→3→4→1と変化させた。

状態1：気体の体積 V_1，温度 $T_1=400$ [K]，圧力 $p_1=100$ [kPa]

　過程Ⅰ：状態1から状態2へ気体を体積一定で変化させた。

状態2：気体の体積 $V_2=V_1$，温度 $T_2=500$ [K]，圧力 p_2

　過程Ⅱ：状態2から状態3へ気体を断熱変化させた。

状態3：気体の体積 V_3，温度 $T_3=600$ [K]，圧力 p_3

　過程Ⅲ：状態3から状態4へ気体を体積一定で変化させ,圧力を100 [kPa]（$=p_1$）にした。

状態4：気体の体積 $V_4=V_3$，温度 T_4，圧力 $p_4=p_1$

　過程Ⅳ：気体を圧力一定の過程で状態4から状態1にもどした。

過程Ⅰ～Ⅳは常に平衡状態を保ちながら行われ，断熱変化では圧力 p と体積 V の間に $pV^{\gamma}=$ 一定の関係が保たれている。ここで γ は1より大きい定数である。気体の定積モル比熱を c [J/(mol·K)] とする。熱量および仕事の符号は，気体に熱量を与えた場合および気体に仕事をした場合に正とする。以下の設問に答えなさい。ただし，気体定数を $R=a$ [J/(mol·K)] とし，$\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}=b$ とおく。γ，a，b，c は単位を含まない数値である。設問(2)，(3)，(4)は解答欄（省略）に与えられた単位を用いて数値で答えなさい（a，b，c は記号のまま用いること）。単位を含む気体定数の記号を用いないように注意しなさい。

(1)　断熱変化の過程における $pV^{\gamma}=$ 一定の関係を，圧力 p と温度 T のみの V を含まない関係で表すと $pT^{\alpha}=$ 一定と書ける。α を γ で表しなさい。

(2)　p_3 を求めなさい。

(3)　過程Ⅰ～Ⅳのそれぞれにおいて外部からこの気体にした仕事を求めなさい。

(4)　状態4から状態1に変化する過程Ⅳで，外部から気体に与えた熱量および気体の温度変化 T_1-T_4 を求め，この気体の定圧モル比熱を求めなさい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

図1のように断面積 S, 長さ $2L$ の断熱された円筒容器が水平に置かれている。容器内にあるバネは自然長 L, ばね定数 k で，このばねは断熱材で作られた薄いピストンと容器に固定されている。ここで，ピストンで区切られた容器の左側をA，右側をBとする。ピストンと容器間は摩擦がなく，はじめ容器内はすべて真空である。

いま連結管のコックDを閉じ，Aに1molの単原子分子理想気体を入れたところ，ピストンは $\frac{L}{3}$ だけ右に移動して静止した（図2）。ここでピストンとばねの質量，連結管の容積はともに無視できる。また，円筒容器，ばね，ピストンの熱容量も無視できる。気体定数を R として以下の各問に答えなさい。

図1

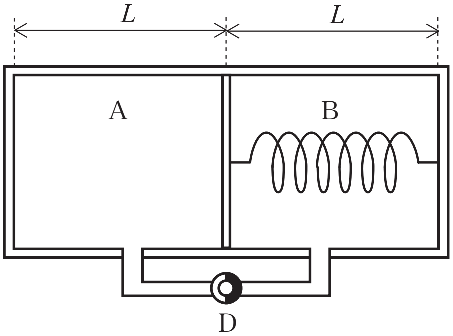
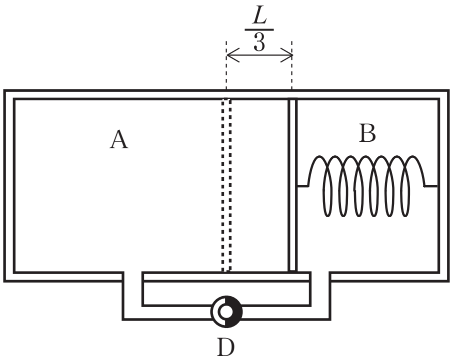


図2



(1)　Aの気体の圧力 P_1 と温度 T_1 を求めなさい。

(1)の状態を保ったままピストンを動かないように固定した。この後BにAと同じ種類の気体を $\frac{1}{3}$ mol入れたところ，Bの気体の圧力はAの気体の圧力の $\frac{1}{3}$ になった。

(2)　Bの気体の温度 T_2 を T_1 を用いて求めなさい。

(3)　コックDを開き十分時間が経過した。このときの気体の温度 T_3 を T_1 を用いて求めなさい。

(4)　ピストンを自由に運動できるようにしたところ，ピストンはしばらく運動をした後に完全に静止し，気体の温度が ΔT だけ上昇した。ΔT を T_1 を用いて求めなさい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

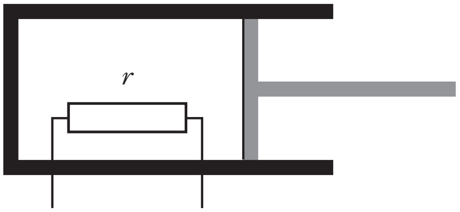
< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

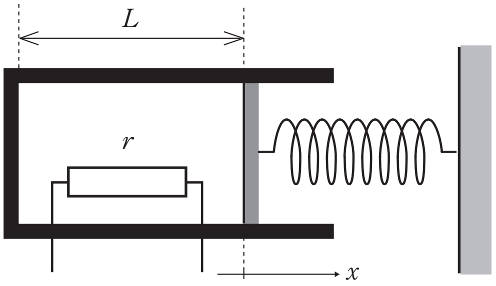
第31講　確認テスト

［　　］にあてはまる最も適当なものを対応する解答群の中から一つずつ選べ。ただし，［カ］～［セ］には，最も適当な数値を記入すること。［カ］，［ケ］，［シ］には0以外の数字が入るものとする。

図(a)，図(b)のように，なめらかに動くピストンの付いた容器に，n [mol] の単原子分子理想気体が封入されている。容器内には r [Ω] の抵抗を持つ電熱線が取り付けてあり，外から電流を流すことができる。ピストンや容器は断熱材でできており，ピストンの断面積は S [m^2] とし，ピストンの質量は無視できるものとする。大気圧は p_0 [Pa]，気体定数は R＝8.3 J/(mol·K) とし，容器のピストン以外の部分は動かないものとする。



図(a)



図(b)

(1)　まず，図(a)の場合を考える。

(a)　電熱線に I [A] の一定電流を t 秒間流したとき，容器内の気体が電熱線から受けとる熱量 Q は［ア］[J] である。この間，気体が膨張してピストンが距離 x [m] だけ移動したとすると，気体の内部エネルギーの変化は［イ］[J] である。また，気体が外にした仕事 W は［ウ］[J] であり，これを気体が受けとる熱量 Q で表すと［エ］となる。

［ア］の解答群

① $\frac{1}{2}rI$　② rI　③ $\frac{1}{2}rI^2$　④ rI^2

⑤ $\frac{1}{2}rIt$　⑥ rIt　⑦ $2rIt$　⑧ $\frac{1}{2}rI^2t$

⑨ rI^2t

イ，ウの解答群

① $\frac{1}{3}p_0Sx$　② $\frac{1}{2}p_0Sx$　③ $\frac{2}{3}p_0Sx$　④ p_0Sx

⑤ $\frac{3}{2}p_0Sx$　⑥ $2p_0Sx$　⑦ $\frac{5}{2}p_0Sx$　⑧ $\frac{5}{3}p_0Sx$

⑨ $\frac{7}{2}p_0Sx$

エの解答群

① $\frac{1}{2}Q$　② $\frac{1}{3}Q$　③ $\frac{2}{3}Q$　④ $\frac{2}{5}Q$

⑤ $\frac{3}{5}Q$　⑥ $\frac{2}{7}Q$　⑦ Q　⑧ $\frac{3}{2}Q$

⑨ $\frac{5}{3}Q$

(b)　大気圧が $p_0=1.0\times10^5$ Pa，ピストンの断面積が $S=1.0\times10^{-2}$ m^2，電熱線の消費電力が 20W であるとすると，ピストンが移動する速度は［オ］cm/s となる。

オの解答群

① 0.33　② 0.50　③ 0.57　④ 0.67

⑤ 0.80　⑥ 1.0　⑦ 1.2　⑧ 1.3

⑨ 1.5

(2)　次に，図(b)のように，ピストンの外側にバネ定数 k [N/m] のバネが取り付けられている場合について考える。バネの一端はピストンに，他端は壁に固定されている。電熱線に電流を流す前は，容器の内側の左端からピストンまでの距離が $L=0.50$ m であり，このときバネは伸縮なく自然の長さであるものとする。以下では，大気圧は $p_0=1.0\times10^5$ Pa，ピストンの断面積は $S=1.0\times10^{-2}$ m^2 とする。

(c)　電熱線に I [A] の一定電流を t 秒間流したところ，容器内の気体が膨張してピストンが $x=0.10$ m 移動した。バネ定数が $k=2.0\times10^3$ N/m であるとすると，膨張後の容器内の気体の圧力 p は［カ］.［キ］$\times10^{［ク］}$ Pa であり，膨張の間に気体が外にした仕事は［ケ］.［コ］$\times10^{［サ］}$ J，気体の内部エネルギーの変化は［シ］.［ス］$\times10^{［セ］}$ J である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　解答

1

問１　(1) $\dfrac{nR}{p}T$　　(2) $p\Delta V$　$[nR\Delta T]$

(3) $\dfrac{3}{2}nR\Delta T$　$\left[\dfrac{3}{2}p\Delta V\right]$

(4) $\dfrac{3}{2}nR\Delta T+p\Delta V$　$\left[\dfrac{5}{2}nR\Delta T,\ \dfrac{5}{2}p\Delta V\right]$

(5) $\dfrac{5}{2}R$

問２　(6) $(m+nM)g$　　(7) $\dfrac{pV_B}{RT}$

(8) $\dfrac{pV_B}{RT}M_Ag$　　(9) $\dfrac{RT}{p}\dfrac{m+nM}{M_A}$

(10) $\dfrac{5}{2}nR\left(\dfrac{m+nM}{nM_A}-1\right)$　　(11) 3.6×10^2

2

(1) $\dfrac{\gamma}{1-\gamma}$　　(2) $125b$ [kPa]

(3) 過程Ⅰ：0 [J],　過程Ⅱ：$100c$ [J],　過程Ⅲ：0 [J],

過程Ⅳ：$-a\left(400-\dfrac{480}{b}\right)$ [J]

(4) 熱量：$(c+a)\left(400-\dfrac{480}{b}\right)$ [J],　温度変化 T_1-T_4：$400-\dfrac{480}{b}$ [K],

定圧モル比熱：$c+a$ [J/mol·K]

3

(1) $P_1=\dfrac{kL}{3S}$,　$T_1=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{kL^2}{R}$　　(2) $\dfrac{1}{2}T_1$　　(3) $\dfrac{7}{8}T_1$　　(4) $\dfrac{1}{16}T_1$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 31 講　確認テスト

【解答】

ア　⑨	イ　⑤	ウ　④	エ　④	オ　⑤	カ　1
キ　2	ク　5	ケ　1	コ　1	サ　2	シ　3
ス　3	セ　2				

【解説】

(1)

(a)　$Q = \boldsymbol{rI^2 \cdot t}\,{}_{\text{ア}}$

状態方程式より，このときの温度変化 ΔT は $p_0Sx = nR\Delta T$ を満たす。よって，

$$\begin{cases} \text{内部のエネルギーの変化：} \Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}p_0Sx}\,{}_{\text{イ}} \\ \text{気体が外へした仕事：} W = \boldsymbol{p_0Sx}\,{}_{\text{ウ}} \end{cases}$$

熱力学第1法則より

$$Q = \Delta U + W = \frac{5}{2}p_0Sx \qquad \therefore \quad p_0Sx = \boldsymbol{\frac{2}{5}Q}\,{}_{\text{エ}}$$

(b)　速度は $v = \dfrac{x}{t}$ と書けるから，

$$v = \frac{x}{t} = \frac{2Q}{5p_0S \cdot t} = \frac{2rI^2 \cdot t}{5p_0S \cdot t} = \frac{2rI^2}{5p_0S} = 8 \times 10^{-3}\ [\text{m/s}] = \boldsymbol{0.8}\ [\text{cm/s}]\,{}_{\text{オ}}$$

(2)

(c)　ピストンにかかる力のつりあいから，

$$p = p_0 + \frac{kx}{S} = (1.0 \times 10^5) + \frac{(2.0 \times 10^3) \times 0.10}{1.0 \times 10^{-2}} = \boldsymbol{1.2 \times 10^5}\ [\text{Pa}]\,{}_{\text{カ, キ, ク}}$$

気体がした仕事は

$$W' = p_0Sx + \frac{1}{2}kx^2 = \boldsymbol{1.1 \times 10^2}\ [\text{J}]\,{}_{\text{ケ, コ, サ}}$$

状態方程式は

$$\begin{cases} \text{膨張前：} p_0SL = nRT_0 \\ \text{膨張後：} pS(L+x) = nRT \end{cases}$$

なので，温度変化を ΔT として，

$$nR\Delta T = pS(L+x) - p_0SL$$

ピストンにかかる力のつりあいより

$$pS = p_0S + kx$$

だから，

$$nR\Delta T = (p_0S + kx)(L+x) - p_0SL = p_0Sx + kxL + kx^2$$

数値を代入し，内部エネルギーの変化は

$$\Delta U' = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}(p_0Sx + kxL + kx^2) = 330 = \boldsymbol{3.3 \times 10^2}\ [\text{J}]\,{}_{\text{シ, ス, セ}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。